Université Hassan II- Mohammedia
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques ***AU :2013/2014***
Option :MIP ***Module :M311***

Premier partiel 2103 : durée 1H 30

Exercice 0.0.1 ***(7 pts)***

Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E): \ \frac{1}{x}.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{y^3}.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{f^2(x,y)}{x^2+y^4}.$$

Soit $f(x,y)=h(x^2+y^4)$ où h est une fonction d'une seule variable de classe $\mathcal{C}^1$ veifiant $h(1)=-4$.

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de h. (2 pts)*
2. *Donner une équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par h. (2 pts)*
3. *Résoudre (E') puis déterminer la fonction f solution de (E). (2+1 pts)*

Exercice 0.0.2 ***(10 pts)****.*

soit f la fonction de trois variales définie par :

$$\begin{cases} f(x,y,z)=xy^2\sin\left(\dfrac{z}{y}\right), & si \ \ y\neq 0 \\ f(x,y,z)=0 & si \ y=0 \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition de f et montrer que f est continue sur D_f. (0.5+1+2 pts)*
2. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x, y et z en tout point (x,y,z) pour $y\neq 0$ de $\mathbb{R}^2$. (0.5+1+0.5 pts)*
3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x, y et z en tout point (x,y,z) pour $y=0$ de $\mathbb{R}^2$. (1+1+1 pts)*
4. *Etudier la différentaibilité de f en $(0,0,0)$. (1.5 pts)*

Exercice 0.0.3 *(1.5+1.5 pts)*

Soit la fonction

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x,y)\to f(x,y) \end{cases}$$

et soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $g(x,y)=\sin\big(x+f(y^2,x)\big)$.

Calculer les dérivées partielles premières de g au moyen de celles de f.

==

Groupe : M.HARFAOUI- S. SAJID

Université Hassan II- Mohammedia
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques ***AU :2013/2014***
Option :MIP ***Module :M311***

Corrigé du premier partiel 2103 : durée 1H 30

Correction 0.0.1

Correction 0.0.2

Soi l'équation aux dérivées partielles :

$$(E): \ \frac{1}{x}.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y}.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Soit $f(x,y) = h(x^2+y^2) = h(t)$ *où* h *est une fonction d'une seule variable de classe* $\mathcal{C}^1$.

Si on pose $u(x,y) = x^2+y^2$ *alors* $f = hou$

1. $\forall (x,y) \in \Big(\mathbb{R}^*\Big)^2$ *on a :*
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial hou}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2).h'(x^2+y^2) = 2xh'(t)$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial hou}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2).h'(x^2+y^2) = 2yh'(t)$
2. *D'après la question, en remplaçant les dérivées partielles par leurs valeurs dans l'équation (E),on obtiendra l'équation différentielle vérifiée par h :*
$$(E') \ \ 4h'(t) = \frac{h(t)}{t^2}.$$
3. *Solution générale de l'éqution différentielle (E').*
   * $h \equiv 0$ *est solution de (E').*
   * *Pour* $h(t) \neq 0$ *on a*
     $4h'(t) = \dfrac{h(t)}{t^2} \Leftrightarrow \dfrac{h'(t)}{h(t)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{t^2} = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{d}{dt}\big(\dfrac{1}{t}\big).$
     De plus $\dfrac{h'(t)}{h(t)} = \dfrac{d}{dt}(\ln(\mid h(t) \mid).$
     Donc $(\ln(\mid h(t) \mid) = -\dfrac{1}{4t} + c$*; ou c est une constante réelle. D'où la solution générale de l'équation E') est :*
$$h(t) = k.e^{-\dfrac{1}{4t}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

     Par suite la solution générale de l'équation (E) est :
$$f(x,y) = k.e^{-\dfrac{1}{4(x^2+y^2)}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Correction 0.0.3

Correction 0.0.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :$f(x,y) = x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x$.

1. *Développement limité à l'ordre 2 de f en $(1,0)$.*
   Le développement limité à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to \ln\left(1+y^2\right)$ est :

$$\ln\left(1+y^2\right) = y^2 + o(x^2+y^2),$$

   et le développement limité à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to e^x$ est :

$$e^x = e.e^{x-1} = e\big(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o(x^2+y^2)\big).$$

   Comme

$$x\ln\left(1+y^2\right) = (x-1)\ln\left(1+y^2\right) + x\ln\left(1+y^2\right),$$

   et en faisant le produit et ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 en $(x-1)$ et y on obtiendra les développements limités à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to \ln\left(1+y^2\right)$ et $(x,y) \to ye^x$ sont :

$$\ln\left(1+y^2\right) = y^2 + o(x^2+y^2),$$

   et

$$ye^x = ey + ey(x-1) + o(x^2+y^2).$$

   Don le développement limité à l'ordre 2 de f en $(1,0)$ est :

$$f(x,y) = ey + ey(x-1) + y^2 + o(x^2+y^2).$$

2. *Soit l'équation $x.\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0$.*
   (a) *Existance de la fonction implicite $y = \phi(x)$ en fonction de x au voisinage de $(1,0)$.*
   On a $\dfrac{\partial f}{\partial}(x,y) = \dfrac{2xy}{1+y^2} - e^x$ et$\dfrac{\partial f}{\partial}(1,0) = -e \neq 0$, donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage V_1 de 1, un voisinage V_0 de 0 et et une foncton

$$\begin{cases} \phi : V_1 \to V_0 \\ \quad x \to y = \phi(x) \end{cases}$$

   tels que :
   * $\phi(1) = 0$,
   * $\forall x \in V_1 : f(x,\phi(x)) = 0$

   (b) *Calcul de $\phi'(x)$ au viosinage de 1.*
   Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(1+y^2) - ye^x$, alors

$$\forall x \in V_1; \quad \phi'(x) = -\frac{\ln\left(1+\phi(x)^2\right) - \phi(x)e^x}{\big(2x.\phi(x)\big)/(1+\phi(x)^2) - e^x}.$$